

J. BOURGET

Des permutations

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10
(1871), p. 254-268

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__254_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DES PERMUTATIONS;

PAR M. J. BOURGET.

1. Au lieu de considérer un nombre quelconque d'objets, nous supposerons qu'il s'agisse de 6, et nous les désignerons par les chiffres successifs 1, 2, 3, 4, 5, 6. On sait que le nombre total des permutations est

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

2. *Ordre des permutations.* — Nous effectuerons les

diverses permutations de six objets dans l'ordre déterminé par la série des opérations suivantes :

1° Les deux premiers objets nous donneront les deux permutations successives

$$1\ 2, \quad 2\ 1.$$

2° Nous placerons le troisième objet à toutes les places possibles successivement dans chacune des permutations précédentes, et nous obtiendrons successivement les résultats suivants :

$$\begin{array}{lll} (1) \ 1\ 2\ 3, & (2) \ 1\ 3\ 2, & (3) \ 3\ 1\ 2, \\ (4) \ 2\ 1\ 3, & (5) \ 2\ 3\ 1, & (6) \ 3\ 2\ 1. \end{array}$$

3° Chacune des permutations précédentes nous permettra de former une série de permutations de 4 objets, et nous les obtiendrons dans un ordre déterminé. Nous continuerons de la même manière pour avoir les permutations de 5 et de 6 objets.

Il est clair que chaque permutation de 6 objets a un rang déterminé.

3. *Notation relative à une permutation.* — On peut indiquer une permutation déterminée par une notation marquant immédiatement son mode de formation. Affectons chaque élément, sauf le premier, d'un indice désignant la place qu'il occupe dans la permutation précédente qui sert à le former, en nommant 1^{re} *place* le premier rang à droite du dernier élément de la permutation précédente; 2^e, 3^e,... *places* celles qu'il occupe ensuite en avançant vers la gauche. Une permutation quelconque, par exemple

$$5\ 4\ 1\ 3\ 6\ 2,$$

pourra s'écrire

$$1\ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6.$$

Cette notation laisse à chaque élément sa place primitive; elle permet, en outre, de raisonner sur le rang de chaque élément, comme nous allons le voir.

Remarquons aussi que l'indice ne peut pas surpasser le numéro de chaque élément, et il est au moins *un*.

Pour désigner la permutation de 6 objets, nous prendrons la notation P^6 , et nous mettrons en indice inférieur le rang de cette permutation dans la série des 720 que l'on peut former.

4. PROBLÈME. — *Trouver la permutation de rang donné a*

La première des permutations de 6 objets est évidemment

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6;$$

donc, en vertu de nos notations conventionnelles,

$$P^6_1 = P^5_1 6_1;$$

car elle provient de la permutation de 5 objets à la suite de laquelle on a placé le dernier objet 6. On aura de même

$$P^6_2 = P^5_1 6_2,$$

$$P^6_3 = P^5_1 6_3,$$

$$P^6_4 = P^5_1 6_4,$$

$$P^6_5 = P^5_1 6_5,$$

$$P^6_6 = P^5_1 6_6.$$

Arrivés à P^6_6 , si nous continuons, il faudra changer de permutation P^5 , et prendre P^5_2 au lieu de P^5_1 ; nous aurons ainsi successivement

$$P^6_7 = P^6_{6,1+1} = P^5_2 6_1,$$

$$P^6_8 = P^6_{6,1+2} = P^5_2 6_2,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$P^6_{12} = P^6_{6,1+6} = P^5_2 6_6.$$

(257)

Nous continuerions en changeant P_2 en P_1 , etc. Posons généralement

$$a = 6q + r$$

avec la restriction que r soit au moins 1 et puisse être égal au diviseur 6; nous aurons

$$P_a^6 = P_{1+q}^1 6_r.$$

On démontrera sans peine la généralité de cette formule en faisant voir que, si elle est vraie pour le rang a , elle est encore vraie pour le rang $a + 1$.

Maintenant posons de même

$$1 + q = 5q_1 + r_1 \quad \text{et} \quad r_1 > 0 \quad \text{et} \quad \leq 5,$$

$$1 + q_1 = 4q_2 + r_2 \quad r_2 > 0 \quad \leq 4,$$

$$1 + q_2 = 3q_3 + r_3 \quad r_3 > 0 \quad \leq 3,$$

$$1 + q_3 = 2q_4 + r_4 \quad r_4 > 0 \quad \leq 2;$$

nous obtiendrons la succession des relations

$$P_a^6 = P_{1+q}^1 6_r,$$

$$P_{1+q}^5 = P_{1+q_1}^4 5_{r_1},$$

$$P_{1+q_1}^4 = P_{1+q_2}^3 4_{r_2},$$

$$P_{1+q_2}^3 = P_{1+q_3}^2 3_{r_3},$$

$$P_{1+q_3}^2 = P_{1+q_4}^1 2_{r_4}.$$

Multiplions *symboliquement* toutes ces égalités membre à membre, ou substituons successivement, nous aurons

$$P_a^6 = P_{1+q_4}^1 2_{r_4} 3_{r_3} 4_{r_2} 5_{r_1} 6_r.$$

Nous remarquerons maintenant que $P_{1+q_8}^2$ est 1 2 ou 2 1; donc on a $q_3 = 0$, ou bien $q_3 = 1$. Comme d'ailleurs les restes ne sont jamais nuls, il faut que $q_4 = 0$; donc

$P_{1+q_1}^1 = P_1^1$. Or cette première permutation du premier objet 1 est cet objet lui-même; donc enfin nous avons

$$(1) \quad P_a^6 = 1.2_{r_4} 3_{r_3} 4_{r_2} 5_{r_1} 6_r$$

avec les égalités

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 6q + r \\ 1 + q = 5q_1 + r_1 \\ 1 + q_1 = 4q_2 + r_2 \\ 1 + q_2 = 3q_3 + r_3 \\ 1 + q_3 = r_4 \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} r \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array} \right\} > 0 \leq \left\{ \begin{array}{l} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{array} \right.$$

Exemple. — Proposons-nous de trouver la 450^e permutation de 6 objets. Nous posons

$$\begin{aligned} 450 &= 6 \cdot 74 + 6, & 4 &= 3 \cdot 1 + 1, \\ 74 &= 5 \cdot 14 + 4, & 2 &= 2, \\ 14 &= 4 \cdot 3 + 2; \end{aligned}$$

donc nous aurons

$$\begin{aligned} P_{450}^6 &= 1 \ 2_2 \ 3_1 \ 4_3 \ 5_5 \ 6_6, \\ &= 2 \ 1 \ 3 \ 4_3 \ 5_5 \ 6_6, \\ &= 6 \ 5 \ 2 \ 4 \ 1 \ 3. \end{aligned}$$

On voit combien est simple notre règle et combien son application est facile.

§. *Dérangements.* — On dit que deux éléments d'une disposition présentent un *dérangement*, ou encore une *inversion*, lorsqu'ils sont rangés par ordre de grandeur décroissante, au lieu de l'être par ordre de grandeur croissante, comme dans la première disposition 1 2 3 4 5 6.

La disposition

652413

présente les 12 dérangements suivants :

65, 62, 64, 61, 63, 52, 54, 51, 53, 21, 41, 43.

La formule générale (1) nous donne en même temps la disposition des éléments de la permutation de rang a et le nombre Δ des dérangements. On peut formuler le théorème suivant :

THÉOREME. — *Le nombre des dérangements de la permutation de rang a est donné par la formule*

$$(3) \quad \Delta = (r-1) + (r_1-1) + (r_2-1) + (r_3-1) + (r_4-1).$$

En effet, un élément quelconque, 3 par exemple, donne un ou plusieurs dérangements s'il est placé à gauche des éléments antérieurs, et seulement dans ce cas; donc le nombre des dérangements relatifs à un élément est égal à son indice diminué d'une unité; donc le nombre total des dérangements d'une permutation est bien donné par la formule ci-dessus.

Nous poserons

$$(4) \quad \delta = r-1, \quad \delta_1 = r_1-1, \quad \delta_2 = r_2-1, \quad \delta_3 = r_3-1, \quad \delta_4 = r_4-1,$$

et nous aurons

$$(5) \quad \Delta = \delta + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4.$$

Chacun des δ représente un nombre de dérangements, et l'on voit que

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta \geq 0, \quad \delta_1 \geq 0, \quad \delta_2 \geq 0, \quad \delta_3 \geq 0, \quad \delta_4 \geq 0, \\ \delta \leq 5, \quad \delta_1 \leq 4, \quad \delta_2 \leq 3, \quad \delta_3 \leq 2, \quad \delta_4 \leq 1. \end{array} \right.$$

6. THÉORÈME. — *Si l'on permute deux éléments consécutifs, le nombre des dérangements varie d'une unité.*

Considérons celui des deux éléments qui a le rang le plus élevé dans la première disposition 1 2 3 4 5 6. S'il marche vers la gauche, son indice augmente d'une unité. S'il marche vers la droite, son indice diminue d'une unité. Dans les deux cas, l'indice de l'autre élément reste invariable. Donc, etc. C. Q. F. D.

7. THÉORÈME. — *Si l'on permute deux éléments quelconques, le nombre des dérangements varie d'un nombre impair, et la permutation change de classe.*

En effet, soient g et h les deux éléments permutés, et p le nombre des éléments qui les séparent. Si h , en marchant vers g , arrive à sa gauche, le nombre des dérangements varie de $p + 1$ unités positives ou négatives, d'après le théorème précédent ; si ensuite g , en marchant en sens inverse, de gauche à droite, arrive à la place de h , le nombre des dérangements variera encore de p unités positives ou négatives ; donc, par la permutation des deux éléments g et h , il aura varié de $2p + 1$ unités positives ou négatives, donc, en résumé, d'un nombre impair d'unités.

8. THÉORÈME. — *Le nombre total des dérangements d'une disposition de n objets ne peut pas surpasser*

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

En effet, nous avons trouvé

$$\Delta = \delta + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 ;$$

d'où l'on voit, d'après le maximum des restes r, r_1, r_2, \dots

que la valeur maximum de Δ est

$$(n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1,$$

ou

$$(7) \quad \square = \frac{n(n-1)}{2}.$$

C. Q. F. D.

Dans le cas de 6 objets, cette valeur maximum est

$$\frac{6.5}{2} = 15.$$

9. PROBLÈME. — *Étant donnée une permutation, trouver son rang dans la série des 1, 2, 3, . . . n permutations.*

Ce problème est l'inverse de celui que nous avons posé au début; il est facile de voir qu'il est résolu par la série des égalités (2).

Nous pouvons, en effet, mettre d'abord la permutation donnée sous la forme

$$1 \ 2, 4 \ 3, 3 \ 4, r_1 \ 5, 1 \ 6, r;$$

nous en tirerons

$$q_3 = r_1 - 1 = \delta_1,$$

$$q_2 = 3\delta_1 + \delta_3,$$

$$q_1 = 4.3\delta_1 + 4\delta_3 + \delta_2,$$

$$q = 5.4.3\delta_1 + 5.4\delta_3 + 5\delta_2 + \delta_1,$$

et enfin

$$(8) \quad a = 6.5.4.3\delta_1 + 6.5.4\delta_3 + 6.5\delta_2 + 6\delta_1 + \delta + 1.$$

Remarque. — Cette formule nous montre que le rang

d'une permutation est déterminé aussitôt que l'on connaît le nombre des dérangements de chacun des objets.

Considérons, comme exemple, la disposition

$$6\ 5\ 2\ 4\ 1\ 3;$$

nous la mettons sous la forme

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6,$$

d'où

$$a = 6.5.4.3 + 6.5.2 + 6.4 + 5 + 1 = 450.$$

10. *Permutations conjuguées.* — Nous nommerons « permutations conjuguées » celles dont le nombre des dérangements est complémentaire au nombre \square maximum et dont les nombres partiels de dérangements δ' , δ'_1 , δ'_2 , δ'_3 , ... sont aussi complémentaires aux maxima. Nous avons donc, par définition, de Δ' et δ' , δ'_1 , ... les relations suivantes :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta + \delta' = 5, \\ \delta_1 + \delta'_1 = 4, \\ \delta_2 + \delta'_2 = 3, \\ \delta_3 + \delta'_3 = 2, \\ \delta_4 + \delta'_4 = 1, \\ \Delta + \Delta' = \square, \end{array} \right.$$

et aussi

$$(10) \quad \Delta' = \delta' + \delta'_1 + \delta'_2 + \delta'_3 + \delta'_4$$

11. THÉOREME. — *Deux permutations conjuguées sont également éloignées des extrêmes*

En effet, nommons a' le rang de la permutation con-

jugée de celle qui a pour rang a . Nous aurons, d'après la formule (8),

$$a' = 6.5.4.3\delta'_4 + 6.5.4\delta'_3 + 6.5\delta'_2 + 6\delta'_1 + \delta' + 1;$$

donc

$$\begin{aligned} a + a' &= 6.5.4.3.1 + 6.5.4.2 + 6.5.3 + 6.4 + 5 + 2 \\ &= 6.5.4.3.1 + 6.5.4.2 + 6.5.3 + 6.4 + 6 + 1 \\ &= 6.5.4.3.2 - 6.5.4.3 \\ &\quad + 6.5.4.3 - 6.5.4 \\ &\quad + 6.5.4 - 6.5 \\ &\quad + 6.5 - 6 \\ &\quad + 6 - 1 \\ &= 6.5.4.3.2 + 1 = \text{nombre total des permutations} + 1. \end{aligned}$$

Désignons par N le nombre total des permutations; nous aurons donc

$$(11) \quad a + a' = N + 1.$$

C. Q. F. D.

Prenons comme exemple la permutation conjuguée de $6\ 5\ 2\ 4\ 1\ 3 = 1\ 2_2\ 3_1\ 4_3\ 5_5\ 6_6$. Nous trouverons

$$\delta' = 0, \quad \delta'_1 = 0, \quad \delta'_2 = 1, \quad \delta'_3 = 2, \quad \delta'_4 = 0;$$

par suite

$$a' = 271.$$

Or la 271^{e} permutation en a 270 avant elle, et la 456^{e} permutation en a $720 - 452 = 270$ après elle.

12. THÉORÈME. — *Le nombre des permutations ayant Δ dérangements est le même que le nombre des permutations ayant Δ' dérangements.*

En effet, pour trouver les permutations qui offrent Δ

dérangements; il faut résoudre l'équation

$$(12) \quad \delta + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 = \Delta$$

en nombres entiers assujettis aux conditions (6). Admettons qu'on ait trouvé une solution. Si nous posons

$$\delta = 5 - \delta', \quad \delta_1 = 4 - \delta'_1, \dots,$$

nous aurons

$$5 - \delta' + 4 - \delta'_1 + 3 - \delta'_2 + 2 - \delta'_3 + 1 - \delta'_4 = \Delta,$$

d'où

$$(13) \quad \delta' + \delta'_1 + \delta'_2 + \delta'_3 + \delta'_4 = \square - \Delta = \Delta';$$

d'où l'on voit que chaque solution de l'équation (12) correspond à une solution de l'équation (13), et réciproquement. Donc le théorème est démontré.

13. PROBLÈME. — *Trouver toutes les permutations ayant un nombre donné Δ de dérangements, et trouver leur nombre.*

La résolution de l'équation

$$\delta + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 = \Delta$$

n'offre aucune difficulté dans la pratique; elle se fera méthodiquement en tenant compte des relations (6). Donnons un exemple de cette résolution en prenant $\Delta = 3$. Nous formerons un tableau dans lequel nous donnerons d'abord à $\delta_2, \delta_3, \delta_4$ leur valeur 0, et la résolution sera ramenée à celle d'une équation à 2 inconnues; puis nous donnerons à δ_2 successivement les valeurs 1, 2, 3, ce qui ramènera chaque fois la résolution à celle d'une équation à 2 inconnues; puis nous ferons varier δ_3 et δ_4 . Nous aurons évidemment le tableau suivant :

(265)

δ	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4
3	0	0	0	0
2	1	0	0	0
1	2	0	0	0
0	3	0	0	0
2	0	1	0	0
1	1	1	0	0
0	2	1	0	0
1	0	2	0	0
0	1	2	0	0
0	0	3	0	0
2	0	0	1	0
1	1	0	1	0
0	2	0	1	0
1	0	1	1	0
0	1	1	1	0
0	0	2	1	0
1	0	0	2	0
0	1	0	2	0
0	0	1	2	0
2	0	0	0	1
1	1	0	0	1
0	2	0	0	1
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
0	0	2	0	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	2	1

Nous pouvons remarquer, d'après la formation même de ce tableau, qu'en nommant N_{Δ}^5 le nombre des solutions de l'équation à 5 inconnues, on a

$$N_{\Delta}^5 = N_{\Delta}^4 + N_{\Delta-1}^4,$$

car la dernière inconnue prend successivement les valeurs 0 et 1.

De même, nous aurons

$$\begin{aligned} N_{\Delta}^4 &= N_{\Delta}^3 + N_{\Delta-1}^3 + N_{\Delta-2}^3, \\ N_{\Delta-1}^4 &= N_{\Delta-1}^3 + N_{\Delta-2}^3 + N_{\Delta-3}^3, \end{aligned}$$

car la dernière inconnue δ_3 prend successivement les valeurs 0, 1, 2; par conséquent, la somme des trois autres est successivement 3, 2, 1 ou 2, 1, 0; ou Δ , $\Delta - 1$, $\Delta - 2$, ou $\Delta - 1$, $\Delta - 2$, $\Delta - 3$. Donc

$$N_{\Delta}^5 = N_{\Delta}^4 + 2N_{\Delta-1}^4 + 2N_{\Delta-2}^4 + N_{\Delta-3}^4.$$

Nous aurons de même

$$\begin{aligned} N_{\Delta}^6 &= N_{\Delta}^5 + N_{\Delta-1}^5 + N_{\Delta-2}^5 + N_{\Delta-3}^5, \\ N_{\Delta-1}^6 &= N_{\Delta-1}^5 + N_{\Delta-2}^5 + N_{\Delta-3}^5 + N_{\Delta-4}^5, \\ N_{\Delta-2}^6 &= N_{\Delta-2}^5 + N_{\Delta-3}^5 + N_{\Delta-4}^5 + N_{\Delta-5}^5, \\ N_{\Delta-3}^6 &= N_{\Delta-3}^5 + N_{\Delta-4}^5 + N_{\Delta-5}^5 + N_{\Delta-6}^5; \end{aligned}$$

par suite

$$N_{\Delta}^6 = N_{\Delta}^5 + 3N_{\Delta-1}^5 + 5N_{\Delta-2}^5 + 6N_{\Delta-3}^5 + 5N_{\Delta-4}^5 + 3N_{\Delta-5}^5 + N_{\Delta-6}^5,$$

et enfin, par une transformation semblable,

$$14) \left\{ \begin{aligned} N_{\Delta}^7 &= N_{\Delta}^6 + 4N_{\Delta-1}^6 + 9N_{\Delta-2}^6 + 15N_{\Delta-3}^6 + 20N_{\Delta-4}^6 + 22N_{\Delta-5}^6 \\ &\quad + 20N_{\Delta-6}^6 + 15N_{\Delta-7}^6 + 9N_{\Delta-8}^6 + 4N_{\Delta-9}^6 + N_{\Delta-10}^6. \end{aligned} \right.$$

Cette formule donne le nombre des solutions demandées, et on pourrait en établir une analogue pour N_{Δ}^p .

Nous remarquerons que N^1 est généralement égal à 1.

Nous remarquerons aussi que, par suite de la loi même suivie dans l'établissement de cette formule, l'indice inférieur est au moins égal à zéro et ne peut pas être négatif; d'un autre côté, il ne peut pas dépasser 5; donc la formule sera générale si l'on convient de mettre pour N_{i-1} le nombre zéro toutes les fois qu'il ne satisfera pas à la relation

$$(15) \quad \begin{cases} \Delta - 1 \geq 0 \\ \quad \leq 5, \end{cases}$$

ou bien toutes les fois que l'on n'aura pas

$$(16) \quad \begin{cases} r \leq \Delta \\ r \geq \Delta - 5. \end{cases}$$

Dans le cas de $\Delta = 3$, nous aurons ι compris entre 3 et 2; donc

$$l = 0, 1, 2, 3;$$

done

$$N_3^5 = 1 + 4 + 9 + 15 = 29;$$

et c'est bien le nombre de solutions données par le tableau précédent.

La loi qui préside aux coefficients de l'équation (14) est donnée par un triangle analogue au triangle arithmétique de Pascal.

Voici ce triangle .

1^{er} . . . 1

2^e . . . 1 1

$$3^e, \dots, 1, 2, 2, 1$$
 $4^e \dots 1 \ 3 \ 5 \ 6 \ 5 \ 3 \ 1$
$$5^e \dots 1 \quad 4 \quad 9 \quad 15 \quad 20 \quad 22 \quad 20 \quad 15 \quad 9 \quad 4 \quad 1$$
$$6^e \dots 1 \ 5 \ 14 \ 29 \ 49 \ 71 \ 90 \ 101 \ 101 \ 90 \ 71 \ 49 \ 29 \ 14 \ 5 \ 1$$
[illegible]

La loi de formation est la suivante :

1° Chacun des nombres de la 3^e ligne se forme en ajoutant le nombre supérieur de la ligne horizontale précédente à la somme des 2 qui le précèdent dans cette même ligne.

2° Chacun des nombres de la 4^e ligne se forme en ajoutant au nombre supérieur la somme des 3 qui le précèdent;

3° Chacun des nombres de la 5^e ligne se forme en ajoutant au nombre immédiatement supérieur la somme des 4 qui le précèdent dans la 4^e ligne horizontale, et ainsi de suite.

Cette loi résulte des égalités successives qui nous ont conduit à la formule (14).

Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} N_{\Delta}^2 &= N_{\Delta}^1 + N_{\Delta-1}^1, \\ N_{\Delta}^3 &= N_{\Delta}^1 + 2N_{\Delta-1}^1 + 2N_{\Delta-2}^1 + N_{\Delta-3}^1, \\ N_{\Delta}^4 &= N_{\Delta}^1 + 3N_{\Delta-1}^1 + 5N_{\Delta-2}^1 + 6N_{\Delta-3}^1 + 5N_{\Delta-4}^1 + 3N_{\Delta-5}^1 + N_{\Delta-6}^1, \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

en remarquant toujours que la plus forte valeur de l'indice inférieur de N^1 est l'indice supérieur du premier membre et que la plus faible est zéro. Dans ces limites, N^1 est égal à 1; en dehors il est nul.

On démontre facilement par cette formule que le nombre des permutations ayant Δ dérangements est égal au nombre de celles qui ont $\Delta' = \square - \Delta$ permutations.